PVK-Lösungen

Nachfolgend findet ihr meine Lösungen zu den Übungen aus dem Skript. Ich kann keine Garantie für korrekte Argumentation & Lösung geben. Solltet ihr einen Fehler vermuten, so schickt mir gerne ein Mail an michbaum@student.ethz.ch.

Übung 1, Prüfung Sommer 2016:
Wir betrachten die ganze Zahl

$$u(n) = 11^n - 1$$

mit $n \in \{1, 2, 3, ...\}$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $u(n)$ durch 10 teilbar ist.

Lösung
Induktionsanfang ($n = 1$):

$u(1) = 11 - 1 = 10 \qquad u(1) \% 10 = 0$ ✓

Induktionsschritt ($n \to n+1$):
(Zeige, dass wenn $u(n)$ durch 10 teilbar ist auch $u(n+1)$ durch 10 teilbar ist)

$$u(n+1) = 11^{n+1} - 1 = 11\,\underbrace{(11^n - 1)}_{u(n)} + 10$$

$$\rightarrow u(n+1) \% 10 = \underbrace{11\,u(n) \% 10}_{\text{nach Hypothese} = 0} + \underbrace{10 \% 10}_{=0} = 0 \quad \square$$

(% Modulo-Operator, gibt den Rest der Division zurück)

Übung 2, Prüfung, Winter 2017:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$u(n) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n$$

Induktionsanfang (n=1):

$$u(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 \leq 1 \checkmark$$

Induktionsschrit ($n \to n+1$):

$$u(n+1) = \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k}}_{\substack{u(n) \\ \leq n}} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \leq n + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}}_{2^n\text{- Glieder}}$$

$$\leq n + \underbrace{\frac{2^n}{2^n}}_{=1} = \underline{\underline{n+1}} \quad \square$$

Übung 3, Prüfung Sommer 2016:
Man untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + \log(n)}$$

Wir vermuten wegen der alternierenden Form, dass das Leibniz-Kriterium angewendet werden könnte. Dafür müssen wir zeigen, dass für $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\log(n)}$

a) a_n eine Nullfolge ist:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \log(n)} = 0 \checkmark$$

Da sowohl $\sqrt{\cdot}$ als auch $\log(\cdot)$ monoton steigende Funktionen sind.

b) a_n monoton fällt, also $a_{n+1} \leq a_n$, und eine Nullfolge ist, also $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$:

Betrachte lieber $b_n = \sqrt{n} + \log(n)$ & zeige $b_{n+1} \geq b_n$.

$\leadsto$ Argument von oben: Da $\sqrt{\cdot}$ & $\log(\cdot)$ mon. steigend sind, ist auch die Linearkombination mon. steigend.

$\Rightarrow$ $a_n = \frac{1}{b_n}$ folglich monoton fallend.

$\Rightarrow$ Reihe <u>konvergiert</u> (aber nicht unbedingt absolut!)

Übung 4, Prüfung Sommer 2016:
Man untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und Divergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(2)^n}{2n+\frac{3}{2}}$$

Wegen dem n-te Potenz-Term $\log(2)^n$ bietet sich das Wurzel-Kriterium an. Wir definieren $a_n = \frac{\log(2)^n}{2n+\frac{3}{2}}$, bemerken $|a_n| = a_n$ und berechnen:

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dots$$

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(2)^n}{2n+\frac{3}{2}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(2)}{\sqrt[n]{2n+\frac{3}{2}}} = \frac{\log(2)}{1} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut

Übung 5, Prüfung, Winter 2017:
Man untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Diese Aufgabe ist sowohl mit dem Wurzel- als auch dem Quotienten-Kriterium schnell gelöst.
Wurzel-Kriterium:

$$L= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut

Quotienten-Kriterium:

$$q= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,2^{n+1}\,\cancel{3^n}}{n\,\cancel{2^n}\,3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{3n} = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut

Übung 6, Prüfung, Sommer 2017:

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} x^n$$

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Randpunkte zu diskutieren.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}+2}{\frac{1}{2^n}+1} = 2 \Rightarrow \text{konvergiert } \forall x: |x|<2$$

$$x=2: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n} \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+2^n} = 1 \Rightarrow \text{keine Nullfolge} \Rightarrow \text{divergent}$$

$$x=-2: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+2^n} \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+2^n} = 1 \Rightarrow \text{keine Nullfolge} \Rightarrow \text{divergent}$$

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$$

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Randpunkte zu diskutieren.

Viele Koeff. sind 0, betrachten:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad \text{mit} \quad a_m = \begin{cases} 1 & m = n! \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ gewöhnliche Potenzreihe

$\Rightarrow$ Da auch für $m \to \infty$ viele Koeff. 0 sind, können wir die Quotientenregel nicht nutzen!

$$R = \frac{1}{\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \underline{1} \Rightarrow \underline{\underline{\text{konvergiert } \forall x : |x| < 1}}$$

$x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \rightsquigarrow$ keine Nullfolge $\Rightarrow \underline{\underline{\text{divergent}}}$

$x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n!} \rightsquigarrow$ keine Nullfolge $\Rightarrow \underline{\underline{\text{divergent}}}$

Übung 7, Prüfung Sommer 2016:
Beweisen Sie, dass, wenn man $\sqrt{e}$ mit einem Taylorpolynom dritten Grades um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ approximiert, der dabei entstehende Fehler kleiner als 4^{-3} ist.

$\rightsquigarrow$ Suchen nur den Fehler

Betrachten das Restpolynom von e^x, nicht $\sqrt{x}$! $n = 3$

$$R\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{e^{\xi}}{4!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4, \quad \xi \in [0, \tfrac{1}{2}], \quad 1 \leq e^{\xi} \leq 2$$

$$\Rightarrow R\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq \frac{2}{4!}\,\frac{1}{2^4} \leq \frac{1}{4!\,2^3} = \frac{1}{4^2 \cdot 12} = \frac{1}{3 \cdot 4^3} \leq \frac{1}{4^3} \quad \square$$

Übung 8, Prüfung Winter 2017:
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}$$

Bemerkung: Weshalb ist hier die Umformung $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} - \lim_{x\to 2} \frac{4}{x^2-4}$ nicht nützlich?

Weil wir in beiden Termen eine Nulldivision haben.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4-4(x-2)}{(x-2)(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)^2}\,1}{\cancel{(x-2)^2}(x+2)} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Übung 9, Prüfung Winter 2017:
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Übung 10, Prüfung Winter 2017:
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

Lösen Sie diese Aufgabe ohne Verwendung des Satzes von L'Hopital!

$e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ (Anfang der jeweiligen
$\sin x = x + \mathcal{O}(x^3)$ Potenzreihenentwicklung)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x + \mathcal{O}(x^2) - \cancel{1}}{x + \mathcal{O}(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x^2)} = \underline{\underline{1}}$$

Übung 11:
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

Benutzen Sie die Methode von L'Hôspital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Übung 12:
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log(x)$$

Benutzen Sie die Substitution $u(x) = -\log(x)$.

$u = -\log(x)$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} -\log(x) = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{u\to\infty} e^{-u} u = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} = \underline{\underline{0}}$$

Übung 13, Prüfung Sommer 2013:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{e^{-\frac{1}{x}}}$$

$u = \frac{1}{x}$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{u\to\infty} \frac{2}{u e^{-u}} = \lim_{u\to\infty} \frac{2e^u}{u} = \underline{\underline{\infty}}$$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}$ abgeschlossen)

ansonsten sagen wir, dass <u>kein</u> Grenzwert existiert.

Übung 14, Prüfung Sommer 2016:
Bestimmen Sie die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \alpha & x \geq 0 \\ (\beta + \alpha + 1)x^7 & x < 0 \end{cases}$$

stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(x) + \alpha = \underline{\underline{\alpha = 0}} = \lim_{x\to 0^-} (\beta + \alpha + 1)x^7$$

Übung 15:
Die Funktion $f(x) = \frac{3\sin(x)}{x}$ sei gegeben auf dem Gebiet $\mathbb{R}^+$. Erweitern Sie die Funktion **stetig** auf das Gebiet $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Mit anderen Worten, wählen Sie den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

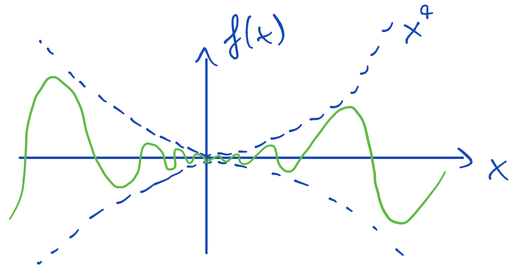
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3(x + \mathcal{O}(x^3))}{x} = \underline{\underline{3 = \alpha}}$$

Übung 16, Prüfung Sommer 2017:
Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. Ist $f(x)$ stetig?
2. Ist $f(x)$ differenzierbar?
3. Ist $f(x)$ stetig differenzierbar?

Am besten einmal zeichnen:



$$1) \lim_{x\to 0} |x^4 \sin(\tfrac{1}{x})| = \lim_{x\to 0} x^4 \underbrace{|\sin(\tfrac{1}{x})|}_{\leq 1 \ \forall x} \leq \lim_{x\to 0} x^4 = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Ja, <u>stetig</u>

↳ Immer super Ansatz bei beschränkten Funktionen?

2) Klar diffbar in $x \neq 0$: $f(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^4 \cos(\frac{1}{x}) \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ ? & x = 0 \end{cases}$

Ableitung in $x=0$ über Definition:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^4 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^3 \sin(\frac{1}{h}) = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Ja, diffbar (da Ableitung überall existiert)

3) Da $f'(0) = 0$ brauchen wir

$$\lim_{x \to 0^+} \left[4x^3 \sin(\tfrac{1}{x}) - x^4 \cos(\tfrac{1}{x}) \tfrac{1}{x^2}\right] = \lim_{x \to 0^-} \left[4x^3 \sin(\tfrac{1}{x}) - x^4 \cos(\tfrac{1}{x}) \tfrac{1}{x^2}\right] = 0$$

Für beide Grenzwerte finden wir mit gleicher Argumentation:

$$\lim_{x \to 0^+} \left| 4x^3 \sin(\tfrac{1}{x}) - x^4 \cos(\tfrac{1}{x}) \tfrac{1}{x^2} \right| \leq \lim_{x \to 0^+} \Big[4x^3 \underbrace{|\sin(\tfrac{1}{x})|}_{\leq 1} + x^2 \underbrace{|\cos(\tfrac{1}{x})|}_{\leq 1}\Big] = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Ja, stetig diffbar

Übung 17: Berechnen Sie folgende Riemannsche Summe:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (akn + bn^2)^{-1/2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{akn + bn^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{a\frac{k}{n} + b}}$$

$$\Rightarrow x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\, dx = \left[\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}\right]_0^1$$

$$= \frac{2\left[\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right]}{a}$$

Übung 18:

$$\int_a^b \log(x)\, dx = \int_a^b 1 \cdot \log(x)\, dx = \ldots \; x \log x \Big|_a^b - \int_a^b \frac{x}{x}\, dx = b \log b - a \log a + a - b$$

$\leadsto$ Definiert für $a, b > 0$

Übung 19, Prüfung Sommer 2016:
Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 x^2 e^{-2x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \Big|_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x} = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x}\, dx$$

$$= -e^{-2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{5}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}$$

Übung 20:
Man löse

$$\int_1^2 \log(4x-1)\,dx$$

$u = 4x-1 \quad , \quad du = 4\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{4}du$

$$\Rightarrow \int_3^7 \frac{1}{4}\log(u)\,du = \frac{1}{4}\Big[u\log(u) - u\Big]_3^7 = \frac{1}{4}\Big[7\log 7 - 3\log 3 - 4\Big]$$

nicht vergessen

Übung 21, Prüfung Sommer 2016:
Berechnen Sie die folgendes Integral:

$$\int_1^2 x^{-3}\arctan(x^{-1})\,dx$$

Auf eurer Integraltabelle solltet ihr finden:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + c$$

$u = \frac{1}{x} \quad , \quad du = -\frac{1}{x^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = dx$

$$\Rightarrow -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{u^3}{u^2}\arctan(u)\,du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} u\arctan(u)\,du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u^2\arctan(u)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}\frac{u^2}{1+u^2}\,du$$

Den Bruch oben mit +1 −1 erweitern

$$= \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 - \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big[\arctan(u)\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \arctan(1) - \frac{5}{8}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

Übung 22:

$$\int x\log(2+x^2)\,dx$$

$u = 2+x^2 \quad , \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2x} = dx$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{2x}\log(u)\,du = \frac{1}{2}\int \log(u)\,du = \frac{1}{2}\Big[u\log(u) - u\Big] + C$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(2+x^2)\log(2+x^2) - 2 - x^2\Big] + C$$

Übung 23:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

Von der Form $\int g'(x)\,g(x)\,dx$

$\Rightarrow u = \ln(x) \quad , \quad du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad x\,du = dx$

$$\Rightarrow \int \frac{x \cdot u}{x}\,du = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C$$

Übung 24, Prüfung Winter 2017:
Berechnen Sie folgendes unbestimmtes Integral

$$\int \frac{9}{x^3 - 3x - 2}\,dx$$

Hinweis: -1 ist eine doppelte Nullstelle des Nenners.

$$= \int \frac{9}{(x+1)^2(x-2)}\,dx = \int \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B}{x-2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int -\frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2}\,dx = -\log|x+1| + \frac{3}{x+1} + \log|x-2| + C$$

Übung 25: Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^1 x^{-s}\,dx$$

Müssen eine Fallunterscheidung für $s<1$, $s=1$ & $s>1$ durchführen:

$$s>1: \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,ds = \left[-\frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}}\right]_0^1 = -\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{1} + \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}} = \underline{\underline{\infty}}$$

$$s=1: \int_0^1 \frac{1}{x}\,ds = \left[\log|x|\right]_0^1 = 0 - \lim_{x\to 0}\log|x| = \underline{\underline{\infty}}$$

$$0<s<1: \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,ds = \dots = -\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{1} + \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{\underbrace{s-1}_{<0}}} = \underline{\underline{\frac{1}{1-s}}}$$

$$s<0: \int_0^1 x^s\,ds = \left[\frac{1}{s+1}x^{s+1}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{s+1}}}$$

Übung 26, Prüfung Winter 2017: Finden Sie alle Lösungen der ODE:

$$y'' + y' - 6y = 50\cos(x)$$

$$y(0) = 0$$

Wir suchen also zuerst die homogenen Lösungen für

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

$$Chp: \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$(\lambda+3)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 2}, \ \underline{\lambda_2 = -3}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = \underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}}$$

$$\text{Part}: y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x),\ y_p' = -A\sin(x) + B\cos(x)$$
$$y_p''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$$

einsetzen $\Rightarrow$ $(-7A+B)\cos(x) + (-A-7B)\sin(x) = 50\cos(x)$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -7A+B = 50 \\ -A-7B = 0 \end{matrix} \leadsto \underline{A=-7},\ \underline{B=1}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \sin(x) - 7\cos(x)}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 - 7 = 0 \Rightarrow C_1 = 7 - C_2$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{(7-C_2)e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \sin(x) - 7\cos(x)}} \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Übung 27, Königsberger 10.3:

$$y''' - y' = q$$

$$\text{Hom}: y_h(x) = \underline{C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}}$$

Wir haben das charakteristische Polynom

$$Chp(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = 0$$

mit den Nullstellen $-1, 0, 1$.

2. $q(x) = \exp(x)$

$$\text{Part}: y_p(x) = Dxe^{x}$$
$$y_p'(x) = De^{x} + Dxe^{x}$$
$$y_p''(x) = 2De^{x} + Dxe^{x}$$
$$y_p'''(x) = 3De^{x} + Dxe^{x}$$

$$\Rightarrow 2De^{x} = e^{x},\quad D = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}}}$$

3. $q(x) = x^2$

Part: $y_p(x) = (ax^2+bx+c)x = ax^3+bx^2+cx$

$y_p'(x) = 3ax^2+2bx+c$

$y_p''(x) = 6ax+2b$

$y_p'''(x) = 6a$ $\Rightarrow -3ax^2-2bx+6a-c = x^2$

$\rightsquigarrow a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = -2$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

Übung 28, Prüfung Sommer 2016:

$$2y'' + 3y' - y = e^x$$
$$y(0) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$$

Hom: Chp: $2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$

$$\rightsquigarrow \lambda = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{2}}}{2} = \frac{1}{4}\left(-3 \pm \sqrt{17}\right)$$

$$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}x} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}x}$$

Part: $y_p(x) = De^{x}$, $y_p'(x) = De^{x}$, $y_p''(x) = De^{x}$

$\rightsquigarrow 4De^{x} = e^{x}$, $D = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow y(x) = C_1 e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}x} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}x} + \frac{1}{4}e^{x}$

$y(0) = 0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{4}$

$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty \Rightarrow C_2 < 0$, da $\frac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$

$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{4} - C_2$

$$\Rightarrow y(x) = \left(-\frac{1}{4} - C_2\right) e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}x} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}x} + \frac{1}{4}e^{x} \qquad C_2 \in \mathbb{R}^-$$

Übung 29:

$$y''' - y = (x+1)e^x$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$$

Hom: Chp: $\lambda^3 - 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$ $\quad \lambda_1 = 1$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + C_3 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x}$$

$$\overset{\text{(reell)}}{=} C_1 e^{x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(D_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + D_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Part: $y_p(x) = (ax+b)x e^x = (ax^2+bx)e^x$

$$y_p'(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x$$

$$y_p''(x) = 2ae^x + (4ax+2b)e^x + (ax^2+bx)e^x$$

$$y_p'''(x) = 6ae^x + (6ax+3b)e^x + (ax^2+bx)e^x$$

$$\Rightarrow 6ae^x + (6ax+3b)e^x = (x+1)e^x \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6a = 1 \\ 6a+3b = 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} a = \underline{\tfrac{1}{6}} \\ b = \underline{0} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(D_1 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + D_2 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)} + \frac{1}{6}x^2 e^x$$

$\star$

$$y'(x) = C_1 e^x - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(-\text{''}-) + e^{-\frac{x}{2}}\left(-D_1\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + D_2\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{3}xe^x + \dots$$

$$y''(x) = C_1 e^x + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(-\text{''}-) - e^{-\frac{x}{2}}(\star) + e^{-\frac{x}{2}}\left(-D_1\tfrac{3}{4}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) - D_2\tfrac{3}{4}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{3}e^x + \dots$$

$$y(0) = C_1 + D_1 = 0$$

$$y'(0) = C_1 - \frac{1}{2}D_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 = 1$$

$$y''(0) = C_1 + \frac{1}{4}D_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - \frac{3}{4}D_1 + \frac{1}{3} = -1 = \frac{1}{3} + C_1 - \frac{1}{2}D_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_2$$

$$\Rightarrow C_1 = \underline{-\frac{1}{9}},\quad D_1 = \underline{\frac{1}{9}},\quad C_2 = \underline{\frac{7\sqrt{3}}{9}}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{9}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{7\sqrt{3}}{9}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{6}x^2 e^x}}$$

Übung 30, Königsberger 10.3:

$$y''' - y' = \cos(x)$$

$$y_h(x) \overset{\text{s.o.}}{=} \underline{C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}}$$

Bemerkung: Der homogene Teil ist der selbe wie bei der letzten Beispiel-Kette.

Part: $y_p(x) = \mathrm{Re}\{De^{ix}\} = \mathrm{Re}\{y_{p_c}\}$

$$y_{p_c}'(x) = iDe^{ix},\quad y_{p_c}'' = -De^{ix},\quad y_{p_c}''' = -iDe^{ix}$$

$$\Rightarrow -2iDe^{ix} = e^{ix} \Rightarrow D = \underline{\frac{1}{-2i}} \Rightarrow y_p = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2i}e^{ix}\right\} = \underline{-\frac{1}{2}\sin x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x}}$$

Übung 31:

$$y' + y = 2\sin(x)$$
$$y(0) = \pi$$

Hom: Chp: $\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_1 = -1$

$\Rightarrow y_h(x) = \underline{Ce^{-x}}$

Part: $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$

$y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$

$\Rightarrow (A+B)\cos x + (B-A)\sin x = 2\sin x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B-A=2 \\ A+B=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B=\underline{1} \\ A=\underline{-1} \end{array}$

$\Rightarrow y(x) = \underline{Ce^{-x} + \sin x - \cos x}$

$y(0) = C - 1 = \pi \Rightarrow C = \pi + 1$

$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{(\pi+1)e^{-x} + \sin x - \cos x}}$

Übung 32:

$$y'' - y' + y = x - e^x + \cos(x)$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Hom: Chp: $\lambda^2 - \lambda + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}$

$\overset{\text{reell}}{=} \underline{e^{\frac{1}{2}x}\left(D_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + D_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$

Part: $y_p(x) = ax + b + A\cos x + B\sin x + Ee^x$

$y_p'(x) = a - A\sin x + B\cos x + Ee^x$

$y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x + Ee^x$

$\Rightarrow ax + b - a - B\cos x + A\sin x + Ee^x = x - e^x + \cos(x)$

$\rightsquigarrow a = \underline{1},\ b = \underline{1},\ E = \underline{-1},\ B = \underline{-1},\ A = \underline{0}$

$\Rightarrow y(x) = \underline{e^{\frac{1}{2}x}\left(D_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + D_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x + 1 - \sin x - e^x}$

$y'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(-\text{''}-) + e^{\frac{1}{2}x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}D_1\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}D_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + 1 - \cos x - e^x$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = D_1 + 1 - 1 = 1 \\ y'(0) = \frac{1}{2}D_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 + 1 - 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} D_1 = \underline{1},\ D_2 = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{e^{\frac{1}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x + 1 - \sin x - e^x}}$

Übung 33, Königsberger 10.5:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$$

Hom: Chp: $\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{-4}}{2} = \underline{\pm i}$

$$\rightsquigarrow y_h(x) = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} \overset{\text{reell}}{=} \underline{D_1 \cos x + D_2 \sin x}$$

Part: Var. d. Konstanten:

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tan x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \int -\tan x \, dx = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = \underline{\ln|\cos x|}$$

$$u_2 = \underline{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{D_1 \cos x + D_2 \sin x + \ln|\cos x| \cos x + x \sin x}}$$

Übung 34:
Finde die partikuläre Lösung je einmal mit Variation der Konstanten und Ansatz der rechten Seite.

$$y'' + 3y' + 2y = x$$

Hom: Chp: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = \underline{-2}, \ \lambda_2 = \underline{-1}$

$$\rightsquigarrow y_h(x) = \underline{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}}$$

Part: $y_p(x) = ax + b, \ y_p' = a$

$$\Rightarrow 3a + 2b + 2ax = x \quad \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \ \underline{b = -\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}}$$

oder Var. d. Kons.:

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{-3x}} \begin{bmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ 2e^{-2x} & e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{-3x}} \begin{bmatrix} -xe^{-x} \\ xe^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \int -x e^{2x}\,dx = -\frac{1}{2}x e^{2x} + \int \frac{1}{2} e^{2x}\,dx = \underline{-\frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}}$$

$$u_2 = \int x e^{x}\,dx = \underline{x e^{x} - e^{x}}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + x - 1$$

$$= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

Übung 35:

$y'' + y = \tan(x)$ Hom: Von oben $y_h(x) = \underline{D_1 \cos x + D_2 \sin x}$

Part: Var. d. Kons.:

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tan x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x \tan x \\ \sin x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}\,dx = \int \cos x - \frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$= \sin x - \underbrace{\int \frac{1}{\cos x}\,dx}_{(*)} = \underline{\sin x - \log\left|\tan x - \frac{1}{\cos x}\right|}$$

$$(*):\ \int \frac{\frac{1}{\cos x}\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)}{\tan x + \frac{1}{\cos x}}\,dx = \left\{ \begin{aligned} u &= \tan x + \frac{1}{\cos x} \\ du &= \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \log|u| = \log\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|$$

$$u_2 = \underline{-\cos x}$$

$$\Rightarrow y(x) = D_1 \cos x + D_2 \sin x + \left[\sin x - \log\left|\tan x - \frac{1}{\cos x}\right|\right]\cos x - \cos x \sin x$$

Übung 36 (linear, nicht-konstante Koeff.):

$$y' + yx = 0$$
$$y(0) = -1$$

Sep. d. Var.:

$$\frac{y'}{y} = -x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x \, dx \Rightarrow \log|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y(x) = \underline{D e^{-\frac{1}{2}x^2}}, \; D \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = \underline{D = -1} \Rightarrow y(x) = \underline{\underline{-e^{-\frac{1}{2}x^2}}}$$

Übung 37 (nicht-linear):

$$y' = xy^2 + x$$
$$y(0) = 1$$

Sep. d. Var.:

$$\frac{y'}{1+y^2} = x \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x \, dx \Rightarrow \arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y(x) = \underline{\tan\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)}$$

$$y(0) = \tan(C) = 1 \Rightarrow \underline{C = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}, \; k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{\tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}}, \; k \in \mathbb{N}$$

Übung 38: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$$

auf 2 verschiedene Arten:
a) Mit der Substitution $x = e^t$

$$h(t) = y(e^t) \qquad \Rightarrow t = \log x$$
$$h'(t) = y'(e^t)e^t = y'(x)x$$
$$h''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = x^2y''(x) + xy'(x)$$

$$\Rightarrow h''(t) + 2h'(t) - 3h(t) = 0 \qquad \text{Chp: } \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$
$$(\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1}, \; \underline{\lambda_2 = -3}$$

$$\Rightarrow h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{\log x} + C_2 e^{-3\log x} = \underline{C_1 x + C_2 x^{-3}}$$

$$y'(x) = C_1 - 3C_2 x^{-4}$$

$$\left.\begin{aligned} y(1) &= C_1 + C_2 = 1 \\ y'(1) &= C_1 - 3C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} C_1 &= \underline{\tfrac{3}{4}} \\ C_2 &= \underline{\tfrac{1}{4}} \end{aligned} \Rightarrow y(x) = \underline{\underline{\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^{-3}}}$$

b) Mit dem Ansatz $y = x^\alpha$ Chp: $\alpha(\alpha-1) + 3\alpha - 3 = 0$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

$$(\alpha+3)(\alpha-1) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= \underline{1} \\ \alpha_2 &= \underline{-3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{C_1 x + C_2 x^{-3}}}$$

$\rightsquigarrow$ AWP analog wie oben.